0.1 Model número 13

Aquest és un model tipus test. Es tracta d'encerclar una opció i raonar la resposta en cada cas.

1. En $\mathbb{R}^3$ es consideren els subespais $U =< (1,0,1) >$, $V =< (1,0,0),(0,1,1) >$ i $W =< (1,0,0),(0,0,1) >$. Aleshores
   (a) U i V són subespais suplementaris.
   (b) U i W són subespais suplementaris.
   (c) V i W són subespais suplementaris.
   (d) Totes les respostes anteriors són falses.

2. Dos subespais F i G de E són suplementaris si i només si
   (a) $E = F + G$
   (b) $F \cap G = \{0\}$
   (c) $E = F + G$ i $F \cup G = \{0\}$
   (d) Cap de les respostes anteriors és certa.

3. Sigui E un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$. Indica l'afirmació correcta:
   (a) La seva dimensió és el rang de qualsevol conjunt de vectors de E.
   (b) La seva dimensió és el número de bases que existeixen en E.
   (c) La seva dimensió és el número de vectors de qualsevol sistema generador de E.
   (d) La seva dimensió és el número mínim de vectors que formen un sistema generador de E.

4. Sigui $(G, *)$ un grup. Podem afirmar
   (a) L'element neutre e és únic.
   (b) L'element simètric de tot element de G és únic.
   (c) Tot element de G té simètric.
   (d) Totes les respostes anteriors són certes.

5. Es defineix en $\mathbb{R}$ l'operació $a \oplus b = ab + 2a - 3b - 1$. Aleshores $2x \oplus (y-2) =$
   (a) $2xy - 3y + 5$
   (b) $xy + 2x - 3y + 1$
   (c) $2xy + 2x - 3y + 5$
   (d) Cap de les anteriors és certa.

6. Sigui $f : E \to F$ una aplicació lineal. Llavors, les imatges d'un conjunt de vectors linealment independent de E és un conjunt de vectors linealment independent de F si:
   (a) f és injectiva.
   (b) $Nuc\ f \neq \{\vec{0}\}$
   (c) f és exhaustiva.
   (d) Cap de les anteriors és certa.

7. La dimensió de l'espai vectorial $M_3^s(\mathbb{R})$, matrius quadrades simètriques d'ordre 3, és:
   (a) 9 (b) 6 (c) 3
   (d) Totes les anteriors són falses.

8. Donat l'espai vectorial $\mathbb{R}^n$ es pot afirmar que:

(a) Existeix una única base de $\mathbb{R}^n$ i es diu base canònica.
(b) Existeix un nombre finit de bases de $\mathbb{R}^n$ i depèn de la dimensió.
(c) Existeix un nombre infinit de bases de $\mathbb{R}^n$.
(d) Cap de les respostes anteriors és correcta.

9. Un endomorfisme és:

(a) Una aplicació lineal entre dos espais vectorials d'igual dimensió.
(b) Una aplicació lineal d'un espai vectorial en si mateix.
(c) Una aplicació lineal bijectiva.
(d) Totes les anteriors són falses.

10. Una matriu quadrada A d'ordre n tal que $A^t = A$ es diu que és:

(a) Simètrica.
(b) Antisimètrica.
(c) Regular.
(d) No pot existir tal matriu.

11. Siguin $u = (a, b)$ i $v = (c, d)$ dos vectors de $\mathbb{R}^2$. Llavors, la condició necessària i suficient per què u i v siguin linealment dependents és que:

(a) $ac - bd = 0$
(b) $ad + bc = 0$
(c) $ad - bc = 0$
(d) $ad - bc \neq 0$

12. Siguin E i F dos espais vectorials sobre el mateix cos. Sigui $f : E \to F$ una aplicació lineal. Llavors:

(a) $f(E)$ és un subespai vectorial de F.
(b) $Nuc\ f$ és un subespai vectorial de E.
(c) (a) i (b) són certes.
(d) Cap de les anteriors és certa.

13. En els mateixes condicions que la pregunta anterior amb f isomorfisme. Llavors:

(a) $Nuc\ f = \{0\}$
(b) $Im\ f = F$
(c) $dim(Im\ f) = dim(E)$
(d) Totes les respostes anteriors són certes.

14. Considerem l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida per $f(x, y, z) = (x+2y-z, y+z, x+y-2z)$. Llavors, una base del subespai vectorial $Nuc\ f$ és:

(a) $(3, -1, 1)$
(b) $(1, 2, -1), (0, 1, 1)$
(c) $(1, 2, -1), (0, 1, 1), (1, 1, -2)$
(d) Cap de les anteriors pot ser base.

15. Siguin E i F dos espais vectorials sobre el mateix cos. Sigui $f : E \to F$ una aplicació lineal i k un escalar. Llavors:

(a) $Im(f) = Im(kf)$ per tot k.

(b) $Im(f) \neq Im(kf)$ per tot k.
(c) $Im(f) = Im(kf)$ per algun k.
(d) Cap de les anteriors és certa.

16. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ un epimorfisme. Podem afirmar:

   (a) f no és necessàriament un monomorfisme.
   (b) f no és necessàriament un monomorfisme, encara que el nucli sigui 0.
   (c) No pot existir un epimorfisme de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^4$.
   (d) L'aplicació és un isomorfisme.

17. Siguin E i F dos espais vectorials sobre el mateix cos tals que $dim(E) = m$ i $dim(F) = n$ amb $m < n$. Sigui $f : E \to F$ una aplicació lineal. Llavors:

   (a) f no pot ser mai un monomorfisme d'espais vectorials.
   (b) f no pot ser mai un epimorfisme.
   (c) No podem dir res del caràcter de f (epi o mono).
   (d) f és un isomorfisme.

18. Dues matrius A i B es poden sumar:

   (a) Sempre.
   (b) Si tenen el mateix nombre de files i el mateix nombre de columnes.
   (c) Si tenen el mateix nombre de files.
   (d) Únicament si són matrius quadrades.

19. Direm que una matriu A és nilpotent d'ordre k quan $A^k = 0$ i $A^{k-1} \neq 0$. La matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (a) És nilpotent d'ordre 2.
   (b) És nilpotent d'ordre 3.
   (c) No és nilpotent.
   (d) És nilpotent d'ordre n.

20. Si A és una matriu triangular inferior i B és una matriu triangular superior de manera que es pot fer el producte AB, aleshores

   (a) AB és una matriu triangular inferior.
   (b) AB és una matriu triangular superior.
   (c) AB no te, en general, estructura triangular.
   (d) Cap de les anteriors és certa.

21. Siguin A i B les dues matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$$

   Llavors, la igualtat $AB = BA$ és certa:

   (a) Sempre per qualssevol a, b, c, d.
   (b) En cap cas.
   (c) Per alguns valors de a, b, c, d.
   (d) Només si $a = d = 0$

Solució al model número 13

Les respostes correctes a cada qüestió són:
1-(a); 2-(d); 3-(d); 4-(d); 5-(a); 6-(a); 7-(b); 8-(c); 9-(b); 10-(a); 11-(c); 12-(c); 13-(d); 14-(a); 15-(c); 16-(c); 17-(b); 18-(b); 19-(b); 20-(c); 21-(a).

Anem a veure el perquè:

Qüestió 1

Facem cada apartat. Abans però, per l'ús que en farem, calculem les equacions de cada subespai[1].

Eq. de U: U té dimensió 1, per tant, hi haurà $3-1=2$ equacions. Llavors, qualsevol vector que afegim a la base no pot augmentar-li el rang. Això vol dir que

$$rang\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \implies \begin{cases} y=0 \\ x-z=0 \end{cases}$$

són les seves equacions.

Eq. de V: V té dimensió 2, per tant, hi haurà $3-2=1$ equació. Com en el cas anterior, qualsevol vector que afegim a la base no pot augmentar-li el rang. Això vol dir que

$$rang\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \implies y-z=0$$

és l'equació que defineix V.

Eq. de W: W també té dimensió 2, per tant, també com en el cas anterior, tindrà 1 equació, i qualsevol vector que afegim a la base no pot augmentar-li el rang. Això vol dir que

$$rang\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \implies y=0$$

és l'equació que defineix W.

Tenim, doncs, les equacions que defineixen cada subespai. La definició de suma directa és la definició de subespais suplementaris. Vegem quina és la resposta correcta.

(a) $U+V$ vindrà generat per $<(1,0,1),(1,0,0),(0,1,1)>$ (és a dir, la unió de les dues bases), que, a més, són linealment independents. Per tant, els tres vectors formen una base. Llavors $dim(U+V) = 3 = dim\ I\!R^3$. D'on, per la propietat de les dimensions, $U+V = I\!R^3$.
Vegem ara la intersecció. Per trobar-la usem les equacions. Un vector que pertanyi a $U\cap V$ verificarà les equacions de cada subespai, per tant, serà solució del sistema

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ x-z &= 0 \\ y-z &= 0 \end{aligned}$$

que és (0,0,0). Per tant, $U\cap V = \{(0,0,0)\}$.
Com que es compleixen les dues condicions de suma directa, els dos subespais, U i V, són suplementaris. **La resposta (a(és correcta**.

(b) Anàlogament, $U+W$ vindrà generat per $<(1,0,1),(1,0,0),(0,0,1)>$. Aquests vectors no són linealment independents. Només n'hi ha dos d'independents. Llavors, $dim(U+W) = 2 = dim\ W$. A més $W \subseteq U+W$. Per la propietat de les dimensions, $U+W = W$.
Llavors no cal ja calcular $U\cap W$ perquè no poden ser mai suplementaris. Per tant, **(b(és fals**.

(c) Vegem $V+W$. Aquest subespai estarà generat pels vectors de cada una de les bases, $<(1,0,0),(0,1,1),(1,0,0),($ dels quals n'hi ha tres linealment independents. Llavors tenim $dim(V+W) = 3 = dim(I\!R^3)$. Com en el cas (a), $V+W = I\!R^3$.
Quant a la intersecció, ja es veu que el vector $(1,0,0)$ pertany als dos subespais, per tant, $V\cap W \neq \{(0,0,0)\}$. Això vol dir que no poden ser suplementaris. Llavors **(c(és fals**.

■

[1] Sabem que, donat un subespai S, el número d'equacions que el defineixen és $dim\ E - dim\ S$

Qüestió 2

Tenint en compte la definició de subespai suplementari, cap dels apartats (a), (b) i (c) són correctes, per tant **la resposta és (d(**.

∎

Qüestió 3

La dimensió d'un espai vectorial E, és el nombre de vectors d'una base de E. Per tant, és el número mínim de vectors que formen un sistema generador (=base). **La resposta correcta és, doncs, (d(**.

∎

Qüestió 4

Facem cada apartat:

(a) Cert. Vegem-ho.
Suposem que hi hagi dos elements neutres, e_1 i e_2. Per ser e_2 element neutre tenim: $e_1 = e_1 * e_2$. Per ser-ho e_1 tenim: $e_1 * e_2 = e_2$. Per tant, $e_1 = e_2$, la qual cosa diu que l'element neutre és únic.

(b) També és cert. Vegem-ho.
Suposem que un element a tingui dos elements simètrics, a_1 i a_2. Tenim (recordem que a' és simètric de a si i només si $a' * a = e$ i $a * a' = e$)

$$a_1 = a_1 * e = a_1 * (a * a_2) = (a_1 * a) * a_2 = e * a_2 = a_2$$

Per tant, aquest element simètric és únic.

(c) També és cert ja que aquesta afirmació forma part de la definició de grup.

Per tant, totes les respostes són certes. **La resposta bona és (d(**.

∎

Qüestió 5

Facem l'operació:

$$2x \oplus (y-2) = 2x(y-2) + 2 \cdot 2x - 3 \cdot (y-2) - 1 = 2xy - 3y + 5$$

Per tant, **la resposta correcta és (a(**.

∎

Qüestió 6

Facem cada apartat:

(a) Aquest és cert. Vegem-ho.
Si les imatges, $f(x_1), \ldots, f(x_n)$, fossin linealment dependents, voldria dir que un d'ells, per exemple $f(x_n)$, seria combinació lineal dels altres. Per tant, hi haurien $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$, de manera que

$$f(x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_{n-1} f(x_{n-1})$$

Passant al primer membre

$$f(x_n) - \lambda_1 f(x_1) - \ldots - \lambda_{n-1} f(x_{n-1}) = 0$$

és a dir (f és lineal),

$$f(x_n - \lambda_1 x_1 - \ldots - \lambda_{n-1} x_{n-1}) = 0 \implies x_n - \lambda_1 x_1 - \ldots - \lambda_{n-1} x_{n-1} \in Nuc\ f$$

i, com que f és injectiva, $Nuc\ f = \{\vec{0}\}$, la qual cosa vol dir que

$$x_n - \lambda_1 x_1 - \ldots - \lambda_{n-1} x_{n-1} = 0 \implies x_n = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_{n-1} x_{n-1}$$

i que llavors x_n seria combinació lineal dels altres, la qual cosa contradiu el fet que $x_1, \ldots, x_n$ són linealment independents.
Llavors **(a(és certa**.

(b) Aquesta afirmació és falsa, ja que si $Nuc\ f \neq \{\vec{0}\}$, agafem $u, v \in Nuc\ f$, amb u, v linealment independents. Però les seves imatges $f(u) = f(v) = \vec{0}$, són linealment dependents. Per tant, si $Nuc\ f \neq \{\vec{0}\}$ hi pot haver vectors independents amb imatges dependents.

(c) Fals també. Agafem, per exemple, $f : I\!R^3 \to I\!R$ de manera que $f(1,0,0) = 0$, $f(0,1,0) = 0$ i $f(0,0,1) = 1$. Aquesta aplicació és exhaustiva i les imatges de $(1,0,0)$ i $(0,1,0)$ no són linealment independents.

■

Qüestió 7

Agafem una matriu quadrada, $A_{3\times 3}$, simètrica,

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} = aI_1 + bI_2 + cI_3 + dI_4 + eI_5 + fI_6$$

on

$$I_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad I_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que són linealment independents i sistema generador de $M_3^s(I\!R)$, i, per tant, base. Llavors la dimensió és 6.

La resposta correcta és (b(.

■

Qüestió 8

Com ja sabem, tot espai vectorial de dimensió finita admet infinites bases, totes formades pel mateix nombre de vectors. Llavors, **la resposta correcta és (c(**.

■

Qüestió 9

Per definició, un endomorfisme és un morfisme d'un espai vectorial en si mateix. Llavors **(b(és la resposta correcta**.

■

Qüestió 10

Tal com diu la definició de matriu simètrica, **la resposta correcta és (a(**.

■

Qüestió 11

Dos vectors són linealment dependents si el seu rang és 1. Per tant, la matriu

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

formada per les coordenades dels vectors en columna, té determinant 0. Això és equivalent a dir que $ad - bc = 0$.

La resposta correcta és (c(.

■

Qüestió 12

Vegem cada apartat:

(a) Cert, per la propietat que té el subespai imatge.

(b) Cert, tal com es veu a la definició del nucli.

Per tant **(c(és la resposta correcta**.

■

Qüestió 13

Tal com es recull a les propietats dels isomorfismes, **la resposta correcta és (d(**.

■

Qüestió 14

Calculem el nucli de l'aplicació lineal. Es tracta de resoldre el sistema

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ y + z &= 0 \\ x + y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

Aquest sistema té per solució: $x = 3z$, $y = -z$, $z = z$. Per tant, un vector del nucli és de la forma $(3z, -z, z) = z(3, -1, 1)$. Llavors, **la resposta correcta és (a(**.

■

Qüestió 15

Vegem cada apartat:

(a) Fals. Basta agafar $k = 0$ per veure que aquesta afirmació no és certa.

(b) Fals també. Si agafem $k = 1$ és clarament una igualtat.

(c) Cert. Per exemple $k = 1$ ho compleix.

Llavors **la resposta correcta és (c(**.

■

Qüestió 16

Observem que per si f és un epimorfisme, aleshores $f(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^4$. Això vol dir que si agafem la base canònica de $\mathbb{R}^3$, formada per tres vectors, i calculem la seva imatge ens dóna una base de $\mathbb{R}^4$, que tindrà quatre vectors, la qual cosa és impossible. Llavors mai no podem tenir un epimorfisme d'un espai de dimensió 3 en un de dimensió 4.

Llavors **la resposta correcta és (c(**.

■

Qüestió 17

Com a la qüestió anterior, mai no pot existir un epimorfisme d'un espai de dimensió m en un de dimensió n, amb $m < n$.

La resposta correcta és (b(.

■

Qüestió 18

Podem sumar dues matrius quan són del mateix ordre, és a dir, quan el nombre de files coincideix i el número de columnes també. Llavors **la resposta correcta és (b(**.

■

Qüestió 19

Calculem les potències de A:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, és nilpotent d'ordre 3.

La resposta correcta és (b(.

■

Qüestió 20

Agafem dues matrius A i B a l'atzar que compleixin les condicions i facem el producte. Siguin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El producte $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ veiem que no té estructura triangular. Llavors **la resposta correcta és (c(**.

■

Qüestió 21

Facem el producte:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} ac + bd & bc + ad \\ bc + ad & ac + bd \end{pmatrix} = B \cdot A$$

Llavors aquestes dues matrius commuten pel producte per qualssevol valors de a, b, c, d. Per tant, **la resposta correcta és (a(**.

■