Model número 1

1. Trieu la resposta correcta

   (a) La solució de $(x+3)^2 \leq 9$ és l'interval $(-6,0)$.

   (b) La solució de $\dfrac{x-1}{x+4} > 1$ és $I\!R - \{-4\}$.

   (c) La solució de $(x+1)^2 \leq 16$ és l'interval $[-5,3)$.

   (d) La solució de $|2x-2| > x+5$ és $(-\infty,-1) \cup (7,+\infty)$.

   (e) La solució de $|2x-2| = x+5$ és $x=7$.

   (f) Cap de les anteriors.

2. Què val el logaritme neperià del número $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$?

   Suposat que $k = 1, 2, 3, \ldots,$

   (a) $z_1 = 1 + 2k\pi i$ (b) $z_2 = 2 + \left(\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right) i$ (c) $z_3 = 2 + \left(\dfrac{\pi}{4} + k\pi\right) i$

   (d) $z_4 = 2 - \left(\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) i$ (e) Cap de les anteriors.

3. Donada la següent funció $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

   (a) f és discontínua en $x = 0$. (b) No existeix $f'(0)$. (c) $f'(0) = 0$.
   (d) $f'(0) = \infty$. (e) Cap de les anteriors.

4. Trieu l'enunciat correcte:

   (a) Si f és una funció contínua en $[a,b]$ i $f(a) < c < f(b)$, aleshores hi ha algun $\alpha \in (a,b)$ tal que $f(\alpha) = c$.

   (b) Sigui f una funció real de variable real i $a \in I\!R$, tal que $f(a) \neq 0$. Aleshores hi ha un entorn de a en el qual $f(x)$ té el mateix signe que $f(a)$.

   (c) Sigui f una funció contínua en (a,b) tal que *Signe* $f(a) \neq$ *Signe* $f(b)$. Aleshores f s'anul·la en algun punt de (a,b).

   (d) Si f és una funció afitada en un entorn del punt a, aleshores f és contínua en a.

   (e) Cap dels enunciats anteriors és correcte.

5. Trieu l'enunciat correcte:

   (a) Si f és una funció integrable en (a,b), aleshores f és derivable en (a,b).

   (b) Si f és una funció integrable en (a,b), aleshores f és contínua en (a,b).

   (c) Si f és una funció contínua en (a,b) aleshores és integrable en (a,b).

   (d) Cap dels enunciats anteriors és correcte.

6. Assenyaleu l'opció correcta:

   (a) $\ln(a-b) = \dfrac{\ln a}{\ln b}$.
   (b) $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.
   (c) $\ln(a \cdot b) = \ln a \cdot \ln b$.
   (d) $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$.
   (e) Cap propietat anterior és correcta.

7. Siguin s i l dos números reals. Assenyaleu l'opció correcta:

   (a) Si $\sum_{n\geq 1} a_n = s$ aleshores $\sum_{n\geq 1} |a_n| = |s|$.
   (b) Si $\lim |a_n| = l$ aleshores $\lim a_n = l$.
   (c) Si $\sum_{n\geq 1} |a_n| = |s|$ aleshores $\sum_{n\geq 1} a_n = s$.
   (d) Si $\lim a_n = l$ aleshores $\lim |a_n| = |l|$.
   (e) Cap propietat anterior és correcta.

8. Assenyaleu l'opció correcta:

   (a) Si f és una funció contínua i derivable en l'interval (a,b), i $f(a) = f(b) = 0$, aleshores $\exists c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.
   (b) Si f és una funció contínua en $[a,b]$ i derivable en l'interval (a,b), i $f(a) = f(b)$, aleshores $\exists c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.
   (c) Si f és una funció contínua en $[a,b]$ i derivable en l'interval (a,b), i $f'(c) = 0$ per algun $c \in (a,b)$, aleshores $f(a) = f(b)$.
   (d) Si f és una funció contínua i derivable en l'interval (a,b), i $f(a) = f(b)$, aleshores $\exists c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.
   (e) Cap propietat anterior és correcta.

9. Una primitiva de $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+2}$ és

   (a) $x^2 - \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + C$.
   (b) $\ln(x^2+2) + C$.
   (c) $x - \ln x^2 + C$.
   (d) $\frac{x^2}{2} - \ln(x^2+2) + C$.
   (e) Cap propietat anterior és correcta.

10. Sabent que $\sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{n!} = e$, la suma de la sèrie $\sum_{n\geq 1} \dfrac{n^2+1}{n!}$ és

    (a) e.
    (b) $3e-1$.
    (c) $3e$.
    (d) $+\infty$.
    (e) Cap de les anteriors és correcta.

Solució al model número 1

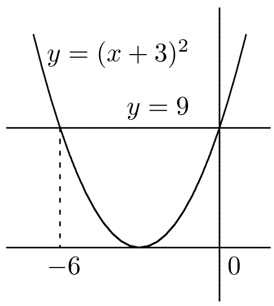
Les respostes correctes a cada qüestió són:
1-(d); 2-(b); 3-(b); 4-(a); 5-(c); 6-(b); 7-(d); 8-(b); 9-(d); 10-(b).

Anem a veure el perquè:

Qüestió 1

Facem cada apartat i calculem quina seria la corresponent solució

(a) Dibuixem la situació

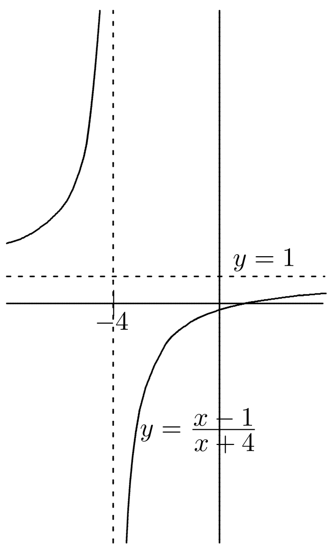


Resolem l'equació $(x+3)^2 = 9$:

$$x + 3 = \pm 3 \implies x = -6,\ x = 0$$

El que queda per davall la recta $y = 9$ és el tros de gràfica compresa entre -6 i 0, incloent-hi els dos extrems, ja que la desigualtat és menor o igual.
La solució seria, en aquest cas, $Sol = [-6, 0]$

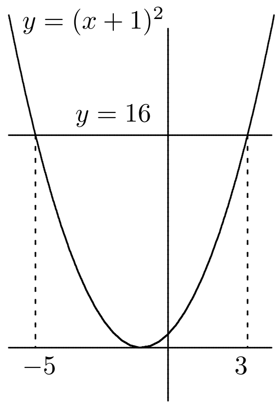
(b) Dibuixem la situació



Ja es veu que la part de corba de $y = \dfrac{x-1}{x+4}$ més gran que 1 és des de $-\infty$ fins a -4. Aleshores la solució seria

$$Sol = (-\infty, -4)$$

(c) Dibuixem la situació



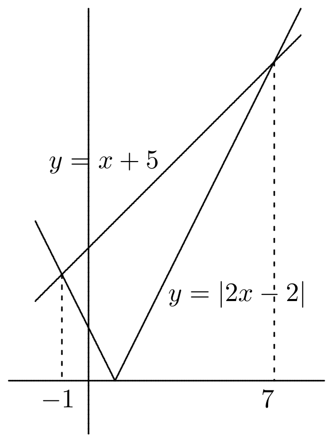
Resolem l'equació $(x+1)^2 = 16$:

$$x + 1 = \pm 4 \implies x = -5,\ x = 3$$

El que queda per davall la recta $y = 16$ és el tros de gràfica compresa entre -5 i 3, incloent-hi els dos extrems, ja que la desigualtat és menor o igual.

La solució seria, en aquest cas, $Sol = [-5, 3]$

(d) Dibuixem



Resolem $|2x - 2| = x + 5$. Tenim

$$\begin{aligned} 2x - 2 = x + 5 &\implies x = 7 \\ -(2x - 2) = x + 5 &\implies x = -1 \end{aligned}$$

Aleshores, el tros de corba de $y = |2x - 2|$ per damunt de la recta $y = x + 5$ és

$$Sol = (-\infty, -1) \cup (7, +\infty)$$

(e) Tenint en compte el càlcul de l'apartat anterior, la solució en aquest cas seria $x = -1$ i $x = 7$.

Llavors, la resposta correcta és (d).

Qüestió 2

Calculem el $\ln z$. Aquest val $\ln z = c + di$ on

$$c = |z| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2, \quad \text{i} \quad d = arg(z) + 2k\pi = \arctan 1 + 2k\pi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

Llavors, **la resposta és (b)**.

Qüestió 3

(a) Vegem la continuïtat

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0\cdot(\text{funció fitada}) = 0 = f(0)$$

Llavors és contínua a 0.

(b) Vegem la derivabilitat

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x} = \nexists$$

No existeix la derivada en el punt 0.

(c) Si la derivada en el punt 0 no existeix, aleshores és fals que $f'(0)=0$.

(d) Anàlogament amb $f'(0)=\infty$

Llavors, la resposta és (b).

Qüestió 4

Facem cada apartat:

(a) És el teorema del valor mig per a funcions contínues.

(b) Perquè això sigui cert, f ha de ser contínua.

(c) També ha de ser contínua perquè es pugui complir.

(d) Aquest apartat és fals, ja que la funció

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x\in[0,1) \\ x-1 & \text{si } x\in[1,2] \end{cases}$$

està fitada dins l'interval $[0,2]$ i no és contínua.

Aleshores, la resposta bona és (a)

Qüestió 5

(a) No. Per exemple la funció $f(x) = E[x]$, part sencera de x, és integrable en qualsevol interval i no és contínua (i, llavors, tampoc derivable).

(b) No. L'exemple anterior és igualment vàlid.

(c) Cert, per la proposició **??**.

Aleshores, la resposta bona és (c)

Qüestió 6

De les propietats de la funció logaritme sabem que l'únic apartat correcte és el (b).

Aleshores, la resposta bona és (b)

Qüestió 7

Facem cada apartat:

(a) És fals. Per exemple, $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ és una sèrie alternada que, segons el criteri de Leibnitz, és convergent.
En canvi, la mateixa sèrie en valor absolut és

$$\sum_{n\geq 1} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$$

que és la sèrie harmònica, divergent.

(b) Fals. Per exemple, la successió $a_n = -\frac{n+1}{n}$ té límit -1, i en valor absolut té límit $+1$.

(c) Fals. Agafem la sèrie $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$, que sabem que és convergent pel criteri de Leibnitz. Calculem la seva suma.

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{k\geq 1} \left(\frac{1}{(2k)^2} - \frac{1}{(2k-1)^2} \right) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{(2k)^2} - \sum_{k\geq 1} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

Usant el problema **??**, apartats (c) i (d), de la pàgina **??**, tenim que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{24} - \frac{3\pi^2}{24} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Llavors, la sèrie $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$, i, en canvi, la sèrie

$$\sum_{n\geq 1} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Les sumes són distintes.

(d) Aquesta és certa, ja que la funció $y = |x|$ és una funció contínua en tot $\mathbb{R}$; i ja sabem que si $f(x)$ és contínua i $\lim a_n = l$ aleshores $\lim f(a_n) = f(l)$.

La resposta correcta és (d).

Qüestió 8

(a) Fals. La funció f ha de ser contínua dins l'interval tancat.

(b) Cert. És el teorema de Rolle.

(c) És fals. Per exemple la funció $y = x^2$ compleix les condicions dins l'interval $[-1, 3]$ i, en canvi, $f(-1) \neq f(3)$.

(d) Fals. La funció f ha de ser contínua dins l'interval tancat.

Llavors, **la resposta correcta és (b)**.

Qüestió 9

Integrem la funció:

$$\int \frac{x^3}{x^2+2}\,dx = \int \left(x - \frac{2x}{x^2+2} \right) dx = \frac{x^2}{2} - \ln(x^2+2) + C$$

Llavors **(d) és la resposta correcta**.

Qüestió 10

Calculem la suma:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^2+1}{n!} = \sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{n!} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} = \sum_{n\geq 1} \frac{n}{(n-1)!} + \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} - 1 = \sum_{n\geq 1} \frac{n-1+1}{(n-1)!} + e - 1 =$$

$$= \sum_{n\geq 1} \frac{n-1}{(n-1)!} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n-1)!} + e - 1 = \frac{0}{0!} + \sum_{n\geq 2} \frac{n-1}{(n-1)!} + \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} + e - 1 =$$

$$= 0 + \sum_{n\geq 2} \frac{1}{(n-2)!} + 2e - 1 = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} + 2e - 1 = 3e - 1$$

La resposta correcta és, doncs, (b).