Model d'examen de problemes

1. a) Siguin A, B, M matrius quadrades d'ordre n tals que $AM = B$. Si A i B són matrius triangulars superiors i no nul·les, es pot assegurar que M és també triangular superior? Si no és així, quina condició hem d'incloure per garantir que M és triangular superior? Raoneu les respostes.

   b) Una matriu quadrada M es diu idempotent quan $M^2 = M$. Si A i B són matrius quadrades que verifiquen $A = AB$ i $B = BA$, proveu que A i B són idempotents.

2. Donada la matriu
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

   a) Demostrau que A és invertible i calculau la seva matriu inversa A^{-1}

   b) Si $M = I - A$, Calculau M^2

   c) Determinau k de manera que es compleixi $M^2 = kM$

   d) Calculau l'expressió de M^n , per tot $n \in I\!N$

3. Sigui a un nombre real, f_a un endomorfisme $f_a : I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$ tal que f_a està definit per $f_a(1,0,0) = (a,1,3)$, $f_a(0,1,0) = (1,3,10)$ i $f_a(0,0,1) = (-1,1,4)$

   a) Trobau els valors de a en què $Nuc\ f_a \neq \{0\}$.

   b) Trobau una base de la $Im\ f_a$ i del nucli per a cada un d'aquests valors.

   c) Trobau la matriu de f en la base $(1,1,1), (0,1,2), (0,2,1)$ de $I\!R^3$.

4. Una empresa farmacèutica multinacional subministra cada mes exactament 130000 vacunes entre els seus filials de París, Roma i Londres, i com a màxim aquest mes ha de subministrar 90000 vacunes a París, 70000 vacunes a Roma i 80000 vacunes a Londres. Determinau el cost mínim del transport, sabent que el cost del transport per vacuna és de 1 u.m. a París, 2 u.m. a Roma i 5 u.m. a Londres, amb unes despeses fixes mensuals de 1950000 u.m.

   Cercau la solució gràficament i mitjançant el mètode del símplex.

Solució al model anterior

Problema 1

(a) Si $\mid A \mid \neq 0$, la matriu A té inversa i tindríem:

$$M = A^{-1} \cdot B$$

ara bé, com que la inversa d'una matriu triangular superior és triangular superior, i el producte de dues matrius triangulars superiors és triangular superior, deduïm que M és triangular superior (de manera anàloga es faria el mateix raonament en el cas en que les matrius fossin triangulars inferiors). Per altra part, el determinant d'una matriu triangular (superior o inferior) és el producte dels elements de la diagonal principal, aleshores si tots els elements de la diagonal principal són diferents de zero la matriu A tindrà inversa i, per tant, M serà triangular. Però, si hi ha qualque element de la diagonal principal diferent de zero, M no té per què ser triangular. Per exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) $A^2 = (A \cdot B)^2 = A \cdot B \cdot A \cdot B$. Però com que $B = B \cdot A$, tenim que $A^2 = A \cdot B \cdot B$, i com que $A = A \cdot B$, substituint tenim $A^2 = A \cdot B = A$.
De manera totalment anàloga veuríem que B és idempotent.

∎

Problema 2

(a) És invertible ja que $\mid A \mid = \frac{1}{2} \neq 0$. Per calcular la inversa farem:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \rightarrow (Transposada) \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \rightarrow (Adjunta) \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

per tant, la matriu inversa és

$$A^{-1} = 2 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

i, per tant,

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

(c) És immediat veure que $k = \frac{1}{2}$.

(d) Tenim que $M^2 = \frac{1}{2}M$ multiplicant els dos membres per M tenim

$$M^3 = \frac{1}{2}M^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}M = \left(\frac{1}{2}\right)^2 M$$

i si repetim aquest procés tindrem:

$$M^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 M, \qquad M^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 M, \qquad \ldots$$

en definitiva

$$M^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} M = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & -\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \end{pmatrix}$$

∎

Problema 3

(a) Cercarem primer la matriu associada a f_a respecte a la base canònica i que és:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

El nucli està format per tots els vectors (x, y, z) que compleixen l'equació:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i aquesta equació tindrà solució única si i només si el rang de la matriu és 3. Per tant, $Nuc\ f_a \neq \{0\}$ quan $rangA < 3$, i això es compleix quan

$$\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 2a - 2 = 0$$

és a dir, quan $a = 1$.

(b) Cerquem primer una base de $Nuc\ f_1$ per això resoldrem per Gauss l'equació matricial anterior per $a = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i ens queden les equacions $x + y - z = 0$, $2y + 2z = 0$ que té per solucions $x = 2z$ i $y = -z$. Per tant, un element de $Nuc\ f_1$ tindrà la forma

$$(2z, -z, z) = z(2, -1, 1)$$

i $Nuc\ f_1 =< (2, -1, 1) >$.

Un sistema generador de $Im\ f_1$ estarà format per les imatges dels elements de la base canònica: $Im\ f_1 =< (1, 1, 3), (1, 3, 10), (-1, 1, 4) >$. Per cercar els vectors linealment independents triangularitzarem la matriu formada per aquest vectors

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que ens dóna per resultat que $Im\ f_1 =< (1, 1, 3), (0, 2, 7) >$ essent $\{(1, 1, 3), (0, 2, 7)\}$ una base de $Im\ f_1$.

(c) La matriu de f_1 respecte a la nova base serà:

$$A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

on P és la matriu de canvi de base de les antigues (base canònica) a les noves.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } P^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aleshores

$$A' = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \frac{28}{3} & \frac{32}{3} & \frac{40}{3} \\ -\frac{8}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

■

Problema 4

Plantegem el problema. Per això diguem x al nombre de vacunes subministrades a la sucursal de París, y a Roma i z a Londres. Les restriccions són

$$\begin{array}{cccrr} x & +y & +z & = & 130000 \\ x & & & \leq & 90000 \\ & y & & \leq & 70000 \\ & & z & \leq & 80000 \end{array}$$

amb totes les variables no negatives. La funció a optimitzar(minimitzar) és

$$Cost = x + 2y + 5z + 1950000$$

Una de les restriccions és una igualtat. Per tant, podem posar una de les variables, z per exemple, en funció de les altres dues. Així aconseguirem un problema de programació lineal amb dues variables que podem resoldre gràficament. Vegem com queda el problema:

Minimitzar

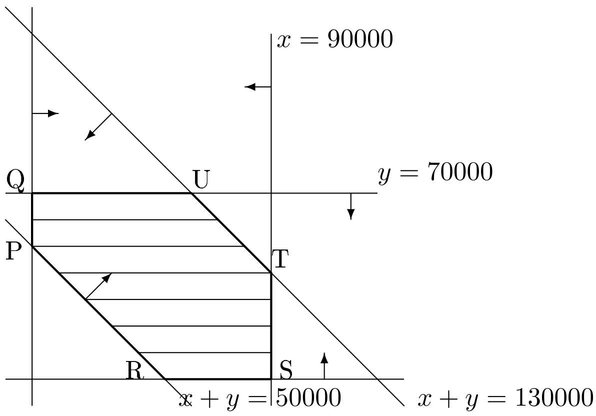
$$Cost = x + 2y + 5(130000 - x - y) + 1950000 = -4x - 3y + 1300000$$

amb les restriccions

$$\begin{array}{ccccll} x & & & \leq & 90000 & \\ & y & & \leq & 70000 & \\ & & z & \leq & 80000 & \Longleftrightarrow 130000 - x - y \leq 80000 \quad \Longleftrightarrow x + y \geq 50000 \\ & & z & \geq & 0 & \Longleftrightarrow 130000 - x - y \geq 0 \quad \Longleftrightarrow x + y \leq 130000 \end{array}$$

amb totes les variables no negatives.

Per resoldre'l, representem-ho gràficament



La zona factible de solucions és la zona ratllada. Sabem que la solució es troba en un dels vèrtexs P(0,50000), Q(0,70000), R(50000,0), S(90000,0), T(90000,40000) o U(60000,70000). Com que es tracta d'un mínim amb valors positius, calculem on es troba aquest mínim

$$\begin{array}{rcl} C_P & = & 4 \cdot 0 - 3 \cdot 50000 + 1300000 = 1150000 \\ C_Q & = & 4 \cdot 0 - 3 \cdot 70000 + 1300000 = 1090000 \\ C_R & = & 4 \cdot 50000 - 3 \cdot 0 + 1300000 = 1100000 \\ C_S & = & 4 \cdot 90000 - 3 \cdot 0 + 1300000 = 940000 \\ C_T & = & 4 \cdot 90000 - 3 \cdot 40000 + 1300000 = 820000 \\ C_U & = & 4 \cdot 60000 - 3 \cdot 70000 + 1300000 = 850000 \end{array}$$

El mínim es troba, doncs, en el punt U, amb valor 850000. Llavors, caldria subministrar 90000 vacunes a París, 40000 a Roma i $z = 130000 - 90000 - 40000 = 0$ vacunes a Londres perquè tingui el mínim cost, que és de 820000 $u.m.$ en el problema equivalent. En el problema original el mínim s'agafa en els mateixos valors però amb valor

$$z = 90000 + 2 \cdot 40000 + 5 \cdot 0 + 1950000 = 2120000 \ u.m.$$

Facem ara el problema mitjançant el mètode del símplex. Podem usar el planteig del problema amb tres variables. En primer lloc transformem el problema en un problema de programació lineal en forma estàndard. Per això diguem x_1 a x, x_2 a y i x_3 a z. La funció a optimitzar és trobar el mínim de $z = x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 1950000$, que, a l'efecte d'aplicació del mètode del símplex, ens és suficient usar $z = x_1 + 2x_2 + 5x_3$.

Vegem les restriccions. La primera restricció és una igualtat; per tant, no cal afegir, de moment, cap variable nova. Afegim-hi les variables compensatòries a la resta de restriccions. A la segona, tercera i quarta inequació hem d'afegir una variable x_4, x_5 i x_6 sumant, perquè tenim un "menor o igual" a totes elles. Ens queda:

$$\begin{array}{llllllll}
\text{Minimitzar: } z = x_1 + 2x_2 + 5x_3 & & & & & & & \\
\quad\text{amb restriccions:} & x_1 + & x_2 & +x_3 & & & & = 130000 \\
 & x_1 + & & & +x_4 & & & = 90000 \\
 & & x_2 & & & +x_5 & & = 70000 \\
 & & & x_3 & & & +x_6 & = 80000
\end{array}$$

Després, hem d'afegir una variable artificial, x_7, a la primera equació per tenir una solució bàsica factible. Per tant, el problema en forma estàndard, reordenant les equacions, serà

$$\text{Minimitzar:} \qquad z = x_1 + 2x_2 + 5x_3 + Mx_7$$

$$\begin{array}{lllllllll}
\text{amb restriccions:} & x_1 + & & & +x_4 & & & & = 90000 \\
 & & x_2 & & & +x_5 & & & = 70000 \\
 & & & x_3 & & & +x_6 & & = 80000 \\
 & x_1 + & x_2 & +x_3 & & & & x_7 & = 130000
\end{array}$$

Ara ja estem en disposició de fer la primera taula del símplex. Aquesta és

		c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	
c^B	$x^B(\times 10^4)$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	Qc.($\times 10^4$(
0	$x_4 = 9$	$\boxed{1}$	0	0	1	0	0	0	$\frac{9}{1} = 9 \ \rightarrow \ x_4$
0	$x_5 = 7$	0	1	0	0	1	0	0	$\frac{7}{0} = \infty$
0	$x_6 = 8$	0	0	1	0	0	1	0	$\frac{8}{0} = \infty$
M	$x_7 = 13$	1	1	1	0	0	0	1	$\frac{13}{1} = 13$
	$z = 13M$	$M-1$	$M-2$	$M-3$	0	0	0	0	
		$\uparrow \ x_1$							

on

$$c_1 = 1 \quad c_2 = 2 \quad c_3 = 5 \quad c_4 = 0 \quad c_5 = 0 \quad c_6 = 0 \quad c_7 = M$$

Primer ens hem d'assegurar que aquesta solució és millorable, ja que si no és així ja hem acabat el problema. Veiem que els elements de l'última fila positius no tenen la resta de la columna negativa o zero; per tant, es pot millorar la solució.

El valor major de l'última fila és $M - 1$. Llavors entra la variable x_1. El valor menor dels quocients de l'última columna correspon a $\dfrac{90000}{1}$. Per tant, surt x_4. Pivotarem, doncs, sobre l'element $a_{11} = 1$, que és l'element requadrat.

La primera passa per obtenir la següent taula del símplex és dividir tota la fila de l'element que surt per l'element pivot per obtenir un 1. Com que ja ho és, ho deixem així. Després aconseguirem zeros (usant les operacions de Gauss, per exemple) a tota la columna de l'element que entra. Per això farem les operacions següents: 4a fila - 1a fila i 5a fila-1a fila$\cdot(M - 1)$. La taula queda:

c^B	x^B $(\times 10^4($	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	Qc.$(\times 10^4($
1	$x_1 = 9$	1	0	0	1	0	0	0	$\frac{9}{0} = \infty$
0	$x_5 = 7$	0	1	0	0	1	0	0	$\frac{7}{1} = 7$
0	$x_6 = 8$	0	0	1	0	0	1	0	$\frac{8}{0} = \infty$
M	$x_7 = 4$	0	$\boxed{1}$	1	-1	0	0	1	$\frac{4}{1} = 4 \;\rightarrow\; x_7$
	$z = 4M + 9$	0	$M - 2$	$M - 3$	$-M + 1$	0	0	0	
			$\uparrow\; x_2$						

Veiem que $z_2 - c_2 > 0$ i $z_3 - c_3 > 0$ amb les components de la resta de la columna no negatives, la qual cosa significa que la solució obtinguda és millorable. Llavors procedirem a obtenir la següent taula del símplex. La major d'aquestes diferències és $z_2 - c_2$, per tant entra x_2. Vegem que surt x_7 perquè és la variable que té quocient mínim. Això significa que pivotem sobre l'element requadrat. Per obtenir la tercera taula només farem 2a fila - 4a fila i 5a fila - 4a fila$\cdot(M-2)$, perquè ja tenim un 1 a l'element pivot. La taula queda

c^B	x^B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
1	$x_1 = 90000$	1	0	0	1	0	0	0
0	$x_5 = 30000$	0	0	-1	1	1	0	-1
0	$x_6 = 80000$	0	0	1	0	0	1	0
2	$x_2 = 40000$	0	1	1	-1	0	0	1
	$z = 170000$	0	0	-1	-1	0	0	$-M + 2$

que, pel teorema de la solució òptima del mètode del símplex, ja ens dóna la solució del problema. Així, agafant les variables reals del problema, la solució és $x_1 = 90000$ vacunes subministrades a París, $x_2 = 40000$ vacunes subministrades a Roma i cap a Londres. El cost mínim serà de $170000 + 1950000 = 2120000$ $u.m.$ ∎